# 机器学习：时间序列(Time Series)



---

- 机器学习：时间序列(Time Series)
  - 1. 简要介绍
    - 1.1. 时间序列分析的基础-平稳性检测(严平稳与宽平稳)
    - 1.2. 自回归( $AR$ )模型
    - 1.3. 移动平均( $MA$ )模型
    - 1.4. 自回归移动平均( $ARMA$ )模型
    - 1.5. 特性分析：
  - 2. 自回归( $AR$ )模型
    - 2.1. 模型
    - 2.2. 平稳判别
    - 2.3. 自相关
    - 2.4. 偏自相关
    - 2.5. 均值
    - 2.6. $Green$ 函数
    - 2.7. 方差
    - 2.8. 协方差函数
    - 2.9. $AR$ 模型自相关系数的性质
    - 2.10. 自相关系数
    - 2.11. 偏自相关系数
  - 拓展：机器学习中的剃刀原理
  - 3. 移动平均( $MA$ ) 模型
    - 3.1. 模型
    - 3.2. 常数均值
    - 3.3. 常数方差
    - 3.4. 自协方差函数 $p$ 阶截尾
    - 3.5. 自相关系数 $p$ 阶截尾
    - 3.6. 偏自相关系数拖尾
    - 3.7. $MA$ 模型的可逆性
    - 3.8. 逆函数的递推公式
  - 4. 自回归移动平均($ARMA$)模型
    - 4.1. 模型

---

## 1. 简要介绍

什么是时间序列?

按照时间的顺序把随机事件变化发展的过程记录下来就构成了一个时间序列，对时间序列进行观察、研究，找寻它变化发展的规律，预测它将来的走势就是时间序列分析。时间序列也是一种随机过程的表示形式。

$$\text{形式}: X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, \cdots$$

时间序列的分解

$$X_t = T_t + S_t + R_t$$

其中，$\{T_t\}$ 为趋势项，$\{S_t\}$ 为季节(循环)项，$\{R_t\}$ 为随机项。

#### 1.1. 时间序列分析的基础-平稳性检测(严平稳与宽平稳)

严平稳：就是一种条件比较苛刻的平稳性定义，它认为只有当序列所有的统计性质都不会随着时间的推移而发生变化时，该序列才被认为平稳。随机变量族的统计性质由它们的联合概率分布族决定。

严平稳时间序列通过只有理论意义，在实践中更多的是条件比较宽松的平稳时间序列。

宽平稳：宽平稳是使用序列的特征统计量来定义的一种平稳性。它认为序列的统计性质主要由它的低阶矩决定，所以只要保证序列低阶矩平稳(二阶)，就能保证序列的主要性质近似稳定。

时间序列 $\{X_t\} = \{X_t, t \in N\}$ 满足：

1. 对 $\forall t \in N, EX_t^2 < \infty$ 。
2. 对 $\forall t \in N, EX_t = \mu$ 。
3. 对 $\forall t, s \in N, E[(X_t - \mu)(X_s - \mu)] = \gamma_{t-2}$

#### 1.2. 自回归( $AR$ )模型

自回归序列 $X_t$ ：

如果时间序列 $X_t$ 是它的前期值和随机项的线性函数，即可表示为:

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + u_t$$

上式称为 $p$ 阶自回归模型，记为 $AR(p)$ 。

实参数 $\varphi_i$ 称为自回归系数，是待估参数。随机项 $u_t$ 是相互独立的白噪声序列，均值为 $0$ ，方差为 $\sigma^2$ 的正态分布。随机项与滞后变量不相关。

一般假定 $X_t$ 均值为 $0$ ，否则令 $\tilde{X}_t = X_t - mean(X_t)$

#### 1.3. 移动平均( $MA$ )模型

移动平均序列 $X_t$ ：

如果时间序列 $X_t$ 是它的当期和前期的随机误差项的线性函数，即可表示为：

$$X_t = u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \cdots - \theta_q u_{t-q}$$

上式称为 $q$ 阶移动平均模型，记为 $MA(q)$ 。

实参数 $\theta_t$ 称为移动平均系数，是评估参数。

### 1.4. 自回归移动平均( $ARMA$ )模型

如果时间序列 $X_t$ 是它的当期和前期的随机误差项以及前期值的线性函数，即可表示为：

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \cdots - \theta_q u_{t-q}$$

上式称为 $(p, q)$ 阶自回归移动平均模型，即为 $ARMA(p, q)$ 。

实参数 $\varPhi_i$ 称为自回归系数，实参数 $\theta_i$ 称为移动平均悉数，是待估参数。

### 1.5. 特性分析：

随机性：如果一个时间序列是纯随机序列，意味着序列没有任何规律性，序列诸项之间不存在相关，即序列是白噪声序列，其自相关系数应该与 $0$ 没有显著差异。可以利用置信区间理论进行判定。

**平稳性**：若时间序列 $X_t$ 满足：

1. 对任意时间 $t$ ，其均值恒为常数。
2. 对任意时间 $t$ 和 $s$ ，其自相关系数只与时间间隔 $t-s$ 有关。

那么，这个时间序列就称为平稳时间序列。

趋势性：当 $Y$ 值在一段时间内随着时间有明显的向上或者向下趋势的时候，我们认为其有趋势性。

季节性：时间序列的季节性是指在某一固定的时间间隔上，序列重复出现某种特性。比如地区降雨量、旅游收入和空调销售额等时间序列都具有明显的季节变化。

## 2. 自回归( $AR$ )模型

### 2.1. 模型

自回归序列 $X_t$ ：

如果时间序列 $X_t$ 是它的前期值和随机项的线性函数(线性叠加)，即可表示为:

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + u_t$$

上式称为 $p$ 阶自回归模型，记为 $AR(p)$ 。

实参数 $\varphi_i$ 称为自回归系数，是待估参数。随机项 $u_t$ 是相互独立的白噪声序列，均值为 $0$ ，方差为 $\sigma^2$ 的正态分布。随机项与滞后变量不相关。

一般假定 $X_t$ 均值为 $0$ ，否则令 $\tilde{X}_t = X_t - mean(X_t)$

更一般来说：具有如下结构的模型称为 $p$ 阶自回归模型，简记为 $AR(p)$

$$\begin{cases} x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + +\phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \\ \phi_p \neq 0 \\ E(\varepsilon) = 0,\ Var(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2,\ E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0,\ s \neq t \\ E x_s \varepsilon_t = 0,\ \forall s < t \end{cases}$$

$E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ 表示二者独立， $E x_s \varepsilon_t = 0$ 表示新加的噪声和前面的值也独立。

特别当 $\phi_0 = 0$ 时，称为中心化 $AR(p)$ 模型。

称 $\{y_t\}$ 为 $\{x+t\}$ 的中心化序列，令

$$\text{均值：} mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \cdots \phi_p}$$
$$\text{中心化：} y_t = x_t - \mu$$

引进延迟算子，中心化 $AR(p)$ 模型又可以记为

$$\Phi(B) x_t = \varepsilon_t$$

自回归系数多项式

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_1 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

### 2.2. 平稳判别

判别原因： $AR$ 模型是常用的平稳序列的拟合模型之一，但并非所有的 $AR$ 模型都是平稳的。

判别方法：单位根判别法，平稳域判别法。

特征根判别：

- $AR(p)$ 模型平稳的充要条件是它的 $p$ 个特征根都在单位圆内
- 根据特征根和自回归系数多项式的根成倒数的性质，等价判别条件是该模型的自回归系数多项式的根都在单位圆外。

平稳域判别：

- 平稳域 $\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p | \text{单位根都在单位圆内}\}$

例： $AR(1)$ 模型的平稳条件：

特征根：$\lambda = \phi$

平稳域：$|\phi| < 1$

平稳 $AR$ 模型的统计性质：均值，方差，协方差，自相关系数，偏自相关系数。

### 2.3. 自相关

构成时间序列的每个序列值 $X_t$ 之间的简单相关关系称为自相关。

自相关程度由自相关系数 $\gamma_k$ 表示时间序列中相隔 $k$ 期的观测值之间的相关程度：

$$\gamma_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X})^2}$$

上式， $n$ 为样本量， $k$ 为滞后期， $\bar{X}$ 代表序列的算数平均。

自相关系数 $\gamma_k \in [-1, 1]$ 。

或者自相关程度写成：

$$\begin{aligned}\rho_{xy} &= \frac{conv(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} \\ &= \frac{conv(x_t, x_{t-k})}{\sigma_{x_t} \sigma_{x_t - k}}\end{aligned}$$

**2.4. 偏自相关**

对于时间序列 $X_t$ 在给定 $X_{t-1}, x_{t-2}, \cdots$ 的条件下， $X_t, X_{t-k}$ 之间的条件相关关系，其相关程度用偏自相关系数 $\phi_{kk}$ 度量。

$$\varphi = \begin{cases} \gamma_1 & k = 1 \\ \frac{\gamma_k - \sum_{j=1}^{k-1} \varphi_{k-1,j} \cdot \gamma_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \varphi_{k-1,j} \cdot \gamma_j} & k = 2, 3, \cdots \end{cases}$$

其中 $\gamma_k$ 是滞后 $k$ 期的自相关系数。

或者写成：

$$\begin{aligned}\rho_{xy|z} &= \phi_{(x|z),(y|z)} \\ x = \phi_z + e_x&, y = \phi_z + e_y\end{aligned}$$

即通过上式，把 $z$ 的影响剔除掉。

**2.5. 均值**

如果 $AR(p)$ 模型满足平稳性条件，则有

$$Ex_t = E(\phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t)$$

根据平稳序列均值为常数，且 $\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声序列，则有

$$Ex_t = \mu,\ E(\varepsilon_t) = 0,\ \forall t \in T$$

推导出

$$\mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p}$$

### 2.6. $Green$ 函数

$AR$ 模型的传递形式

$$
\begin{aligned}
x_t &= \frac{\varepsilon_t}{\Phi(B)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{k_i}{1-\lambda_i B}\varepsilon_t = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{\infty} k_i(\lambda_i B)^j \varepsilon_t \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{p} k_i \lambda_i \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} G_j \varepsilon_{t-j}
\end{aligned}
$$

其中系数 $\{G_j, j=1,2,\cdots\}$ 称为 $Green$ 函数。

$Green$ 函数递推公式

原理

$$
\begin{cases} \Phi(B)x_t = \varepsilon_t \\ x_t = G(B)\varepsilon_t \end{cases} \Rightarrow \Phi(B)G(B)\varepsilon_t = \varepsilon_t
$$

$G(B)$ 可以看成 $IIR$ 输入，$x_t$ 看成信号输出。

方法：待定系数法

递推公式

$$
\begin{cases} G_0 = 1 \\ G_j = \sum_{k=1}^{j} \phi'_k G_{j-k},\ j=1,2,\ldots \end{cases}, 其中\ \phi'_k = \begin{cases} \phi_k,\ k \leqslant p \\ 0,\ k > p \end{cases}
$$

### 2.7. 方差

平稳 $AR$ 模型的传递形式

$$
x_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \varepsilon_{t-j}
$$

两边求方差得

$$
Var(x_t) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j^2 \sigma_g^2, \quad G_j为Green函数
$$

### 2.8. 协方差函数

在平稳 $AR(p)$ 模型两边同乘 $x_{t-k}, \forall k \geqslant 1$ 再求期望

$$
E(x_t x_{t-k}) = \phi_1 E(x_1 x_{t-k}) + \cdots + \phi_p E(x_p x_{t-k}) + \phi_1 E(x_{t-k})
$$

根据(噪声与之前历史值独立)

$$
E(\varepsilon_t x_{t-k}) = 0, \quad \forall k \geqslant 1
$$

代入，得到协方差函数的递推公式

$$\gamma_k=\phi_1\gamma_{k-1}+\phi_2\gamma_{k-2}+\cdots+\phi_p\gamma_{k-p}$$

$x_t$ 自回归，$\gamma_k$ 也是自回归。 $x_t$ 平稳，$\therefore$ 协方差与间距 $k$ 有关。

**2.9. $AR$ 模型自相关系数的性质**

拖尾性：

$$\rho(k)=\sum_{i=1}^{p}c_i\lambda_i^k \quad c_1,c_2,\cdots,c_p\text{不能恒等于}0$$

呈负指数衰减：

$$\rho(k)=\sum_{i=1}^{p}c_i\lambda_i^k\to 0$$

判别一串序列，先算自相关系数，衰减：说明平稳。衰减慢：说明瞬态响应长；衰减快：说明数据与历史信号关系不大。

自相关系数按复指数单调收敛到 $0$： $x_t=0.8x_{t-1}+\varepsilon_t,\ x+t=-0.8x_{t-1}+\varepsilon_t$

自相关系数呈现出"伪周期"性：

不规则衰减：

**2.10. 自相关系数**

定义：

$$\rho_k=\frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

平稳 $AR(P)$ 模型的自相关系数递推公式：

$$\rho_k=\phi_1\rho_{k-1}+\phi_2\rho_{k-2}+\cdots+\phi_p\rho_{k-p}$$

**2.11. 偏自相关系数**

定义：对于平稳 $AR(p)$ 序列，所谓滞后 $k$ 偏自相关系数就是指在给定中间 $k-1$ 个随机变量 $x_{t-1},x_{t-2},\cdots,x_{t-k+1}$ 的条件下，或者说在剔除了中间 $k-1$ 个随机变量的干扰之后， $x_{t-k}$ 对 $x_t$ 影响的相关度量。用数学语言描述就是：

$$\rho_{x_t,x_{t-k}|x_{t-1},\cdots,x_{t-k+1}}=\frac{E[(x_t-\hat{E}x_t)(x_{t-k}-\hat{E}x_{t-k})]}{E[(x_{t-k}-\hat{E}x_{t-k})]}$$

计算：滞后 $k$ 偏自相关系数实际上就等于 $k$ 阶自回归模型第 $k$ 个回归系数的值。

$$\begin{cases}\rho_1=\phi_{k1}\rho_0+\phi_{k2}\rho_1+\cdots+\phi_{kk}\rho_{k-1}\\ \rho_2=\phi_{k1}\rho_1+\phi_{k2}\rho_0+\cdots+\phi_{kk}\rho_{k-2}\\ \cdots\cdots\\ \rho_3=\phi_{k1}\rho_{k-1}+\phi_{k2}\rho_{k-2}+\cdots+\phi_{kk}\rho_0\end{cases}$$

$$\phi_{kk} = \frac{E[(x_t - \hat{E}x_t)(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})]}{E[(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})]}$$

例：

$x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$

理论偏自相关系数：

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 0.8, & k = 1 \\ 0, & k \geqslant 2 \end{cases}$$

$x_t = -0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$

理论偏自相关系数：

$$\phi_{kk} = \begin{cases} -0.8, & k = 1 \\ 0, & k \geqslant 2 \end{cases}$$

$x_t = -x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$

理论偏自相关系数：

$$\phi_{kk} = \begin{cases} -\frac{2}{3}, & k = 1 \\ -0.5, & k = 2 \\ 0, & k \geqslant 0 \end{cases}$$

### 拓展：机器学习中的剃刀原理

$Occam$ 剃刀原理告诉我们如果同时有两种理论能解释同一种现象，应该选择更简单的那种。

对应到机器学习中，需要在 $train\ error$ 和 $overfiting\ error$ 间做平衡，在两个同样能很好解释训练数据中的模型中选择那个更加简单的模型，以防止模型的过拟合。

## 3. 移动平均( $MA$ ) 模型

### 3.1. 模型

移动平均序列 $X_t$ ：

如果时间序列 $X_t$ 是它的当期和前期的随机误差项的线性函数，即可表示为：

$$X_t = u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \cdots - \theta_q u_{t-q}$$

上式称为 $q$ 阶移动平均模型，记为 $MA(q)$ 。

实参数 $\theta_t$ 称为移动平均系数，是评估参数。

具有如下结构的模型称为 $q$ 阶自回归模型，简记为 $MA(q)$ 。

$$
\begin{cases}
x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q} \\
\theta \neq 0 \\
E(\varepsilon) = 0,\ Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^1,\ E(\varepsilon_t\varepsilon_s) = 0,\ s \neq t
\end{cases}
$$

特别当 $\mu = 0$ 时，称为中心化 $MA(q)$ 模型(归一化处理)。

引进延迟算子，中心化 $MA(q)$ 模型又可以简记为

$$x_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

$q$ 阶移动平均系数多项式

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - -\theta_q B^q$$

**3.2. 常数均值**

$$Ex_t = E(\mu + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q})$$

**3.3. 常数方差**

$$
\begin{aligned}
Var(x_t) &= Var(\mu + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}) \\
&= (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}
$$

**3.4. 自协方差函数 $p$ 阶截尾**

$$
\gamma_k = \begin{cases}
(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2, & k = 0 \\
(-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i\theta_{k+i})\sigma_\varepsilon^2, & 1 \leqslant k \leqslant q \\
0, & k > q
\end{cases}
$$

**3.5. 自相关系数 $p$ 阶截尾**

$$
\rho_k = \begin{cases}
1, & k = 0 \\
\frac{-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i\theta_{k+i}}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2}, & 1 \leqslant k \leqslant q \\
0, & k > q
\end{cases}
$$

**3.6. 偏自相关系数拖尾**

$$\phi_{kk} = (-\theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q})(-\theta_1\varepsilon_{t-k-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-k-q+1})$$

**3.7. $MA$ 模型的可逆性**

$MA$ 模型自相关系数的不唯一性：不同的 $MA$ 模型具有完全相同的自相关系数和偏自相关系数。

$$x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} \Leftrightarrow x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$$
$$x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2} \Leftrightarrow x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2}$$

可逆的定义：若一个 $MA$ 模型能够表示成为收敛的 $AR$ 模型形式，那么该 $MA$ 模型称为可逆 $MA$ 模型。

可逆概念的重要性：一个自相关系数列唯一对应一个可逆 $MA$ 模型

可逆 $MA(1)$ 模型：

$$
\begin{array}{ccccc}
x_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} & & & & x_t = \varepsilon_t - \frac{1}{\theta}\varepsilon_{t-1} \\
\Downarrow & \searrow & & \swarrow & \Downarrow \\
\frac{x_t}{1-\theta\cdot B} = \varepsilon_t & & \rho = \frac{-\theta}{1+\theta^2} & & \frac{x_t}{1-\frac{1}{\theta}\cdot B} = \varepsilon_t \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
|\theta| < 1, \text{可逆} & & & & |\theta| > 1, \text{可逆}
\end{array}
$$

$MA(q)$ 模型的可逆条件是：

- $MA$ 模型的特征根都在单位圆内

$$|\lambda_i| < 1$$

- 等价条件是移动平滑系数多项式的根都在单位圆外

$$|\frac{1}{\lambda_i}| > 1$$

### 3.8. 逆函数的递推公式

原理

$$\begin{cases} x_t = \Theta(B)\varepsilon_t \\ \varepsilon_t = I(B)x_t \end{cases} \Rightarrow \Theta(B)I(B)x_t = x_t$$

方法：待定系数法

递推公式：

$$\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_j = \sum_{k=1}^{j} \theta'_k I_{j-k}, \quad j = 1, 2, \cdots \end{cases} \text{其中}\theta'_k = \begin{cases} \theta_k,\ k \leqslant q \\ 0,\ k > q \end{cases}$$

## 4. 自回归移动平均($ARMA$)模型

### 4.1. 模型

自回归移动平均序列 $X_t$

如果时间序列 $X_t$ 是它的当期和前期的随机误差项

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \cdots - \theta_q u_{t-q}$$

上式称为 $(p, q)$ 阶自回归移动平均模型，即为 $ARMA(p, q)$ 。

实参数 $\varPhi_i$ 称为自回归系数，实参数 $\theta_i$ 称为移动平均悉数，是待估参数。

具有如下结构的模型称为自回归移动平均模型，简记为 $ARMA(p, q)$ 。

$$\begin{cases} x_t = \varphi_0 + \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \cdots + \varphi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ \varphi_p \neq 0,\ \theta_p \neq 0 \\ E(\varepsilon_t) = 0,\ Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2,\ E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0,\ s \neq t \\ E(x_s \varepsilon_t) = 0,\ \forall s < t \end{cases}$$

特别当 $\phi_0 = 0$ 时，称为中心化 $ARMA(p, q)$ 模型。

引进延迟算子，中心化 $ARMA(p, q)$ 模型又可以简记为

$$\Phi(B)x_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

$p$ 阶自回归系数多项式：

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

$q$ 阶移动平均系数多项式：

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$$